ΕΠΕΚΤΕΤΑΜΕΝΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ – ΣΤΕΡΕΟΓΡΑΦΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΑ ΤΟΥ RIEMANN:

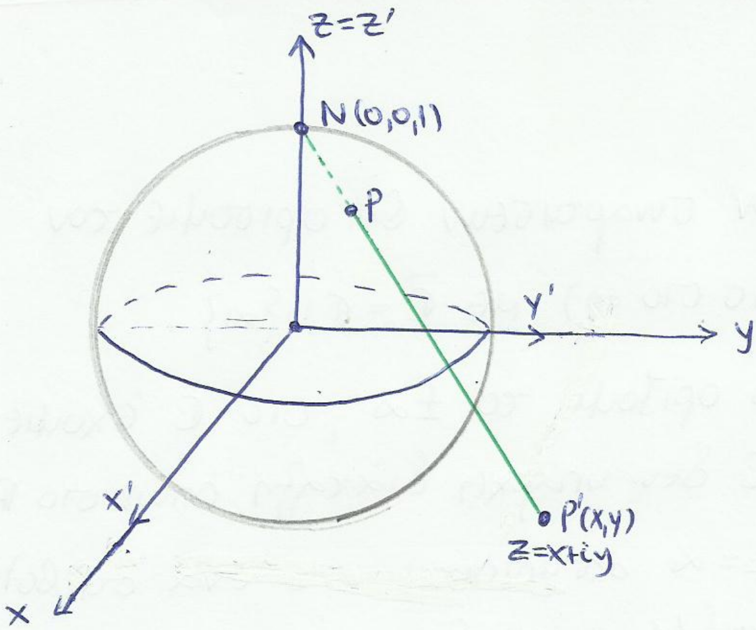
Για τη μελέτη των μιγαδικών συναρτήσεων θα ορίσουμε τον αριθμό ∞ (άπειρο ή σημείο στο ∞) με $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Σε αντίθεση με το $\mathbb{R}$ που ορίζουμε το $\pm\infty$, στο $\mathbb{C}$ έχουμε μόνο το ∞ διότι στο $\mathbb{C}$ δεν υπάρχει διάταξη όπως στο $\mathbb{R}$.
Ουσιαστικά ο αριθμός $z=\infty$ αντιστοιχεί σε ένα συμβολικό σημείο στο άπειρο. Το μιγαδικό επίπεδο με το σημείο αυτό ονομάζεται <u>επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο</u>.

Το σημείο ∞ έχει τις εξής αλγεβρικές ιδιότητες:

- $z+\infty = +\infty$
- $z\cdot\infty = \infty$, $z\neq 0$
- $\infty\cdot\infty = \infty$
- $\infty+\infty=\infty$
- $\dfrac{z}{\infty}=0$, $\dfrac{\infty}{z}=\infty$, $z\neq 0$
- $\dfrac{z}{0}=\infty$, $z\neq 0$

Γεωμετρικό πρότυπο για το $\overline{\mathbb{C}}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$ σε ένα ορθομοναδιαίο σύστημα συντεταγμένων $Ox'y'z'$ με εξίσωση:
(S): $x'^2+y'^2+z'^2=1$ όπου $Ox'y'$: $z'=0$ να είναι το μιγαδικό επίπεδο με πραγματικό άξονα τον Ox' και φανταστικό άξονα τον Oy'.

(<u>Σχόλιο</u>: Το σύνολο $\{z: |z|>\rho\} = B_\rho$ θα λέγεται r-περιοχή του ∞)



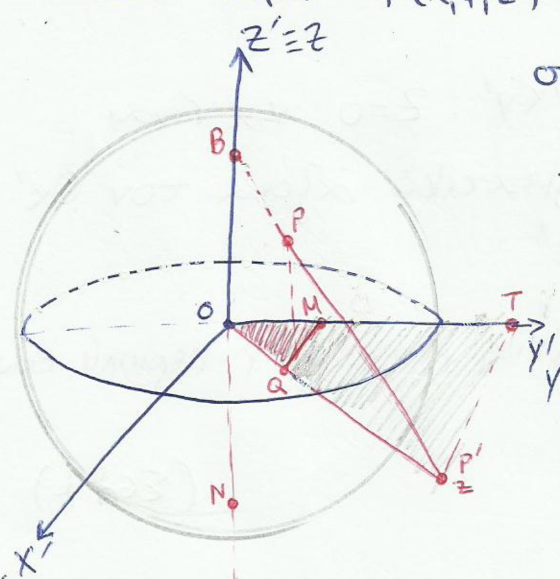
Το N(0,0,1) καλείται βόρειος πόλος της (S). Έστω P σημείο στην (S) τότε η NP ημιευθεία τέμνει το μιγαδικό επίπεδο στο P'(x,y,0). Έτσι, στο P της (S) θα αντιστοιχεί ο z=x+iy.

Αντίστροφα, σε κάθε σημείο P' του μιγαδικού επιπέδου αντιστοιχεί μοναδικό σημείο P της (S) που είναι το σημείο τομής της NP' με τη σφαίρα (S).

Άρα, δείξαμε ότι υπάρχει μια 1-1 (και επί) απεικόνιση (ή αντιστοίχηση) των σημείων της (S) με τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου $\overline{\mathbb{C}}$.

Το γεωμετρικό πρότυπο αυτό θα καλείται σφαίρα του Riemann και η απεικόνιση αυτή θα καλείται στερεογραφική προβολή.

Εάν είναι P(x,y,z) εικόνα του z=x+iy πάνω στη σφαίρα του Riemann τότε ισχύουν:



$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{1-z'} \quad (*)$$ και ότι:

$$x' = \frac{2x}{|z|^2+1}, \quad y' = \frac{2y}{|z|^2+1}, \quad z' = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \quad (**)$$

(προς απόδειξη με 2 τρόπους).

Πράγματι από το δεύτερο σχήμα τα τρίγωνα $OP'T$ και OQM είναι όμοια.

Συνεπώς, ισχύει η αναλογία:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{|z|}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \quad ①$$

Επίσης, τα τρίγωνα ONP' και QPP' είναι όμοια

Άρα, $\frac{1}{|z|} = \frac{z'}{|z|-\sqrt{x'^2+y'^2}} \Rightarrow 1-z' = \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{|z|}$ ②

Από ①, ② προκύπτει $\boxed{\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{1-z'}}$ ⊛

Τέλος, αφού $x'^2+y'^2+z'^2=1$ το ⊛ δίνει

$$|z|^2+1 = \frac{x'^2}{(1-z')^2} + \frac{y'^2}{(1-z')^2} + 1 = \frac{2(1-z')}{(1-z')^2} = \frac{2}{1-z'} \quad ③$$

Από, την ⊛ και ③ προκύπτει:

$$\boxed{x' = \frac{2x}{|z|^2+1}, \quad y' = \frac{2y}{|z|^2+1}, \quad z' = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}} \quad ⊛⊛$$

Θα δούμε και θα αποδείξουμε με έναν β' τρόπο αυτά τα συμπεράσματα με τη βοήθεια της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Έστω $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = x+iy$. Και η απεικόνιση (φ) μεταξύ του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου και της σφαίρας (S) που περιγράψαμε παραπάνω.

Θα επιδιώξουμε να βρούμε τον τύπο της

Έστω λοιπόν $\varphi(z=x+yi)=(x',y',z')$ όπως είχε επειδή το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από το $N(0,0,1)$ και $P'(x,y,0)$ με τη σφαίρα $(S): x^2+y^2+z^2=1$

Η εξίσωση της ευθείας αυτής έχει παραμετρικώς:

$X=tx$, $Y=ty$, $Z=1-t$, $t\in\mathbb{R}$ (όπου $z<1$)

Θα υπολογίσουμε το t ώστε:

$X^2+Y^2+Z^2=1 \Rightarrow t^2(x^2+y^2+1^2)-2t=0 \Rightarrow \cancel{t=0}$ ή $t=\dfrac{2}{x^2+y^2+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow t=\dfrac{2}{|z|^2+1}$ (Απορ. διότι $z<1$)

Η τομή λοιπόν της σφαίρας (S) με την ευθεία αυτή είναι το σημείο:

$$(x',y',z')=\left(\frac{2x}{|z|^2+1},\frac{2y}{|z|^2+1},1-\frac{2}{|z|^2+1}\right)=\left(\frac{2x}{|z|^2+1},\frac{2y}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

Συνεπώς, $\varphi(z)=\varphi(x+iy)=\left(\dfrac{2x}{|z|^2+1},\dfrac{2y}{|z|^2+1},\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$

Παράδειγμα:

Έστω $2x+3y=1$ ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο

Τότε από τη σχέση ⊛ έχουμε:

$$\frac{2x'}{1-z'}+\frac{3y'}{1-z'}=1 \Rightarrow 2x'+3y'+z'=1 \quad \text{και} \quad x'^2+y'^2+z'^2=1$$

Δηλαδή η εικόνα της (ε) ευθείας πάνω στη σφαίρα του Riemann είναι η τομή του επιπέδου: $2x'+3y'+z'=1$ και της σφαίρας του Riemann, δηλαδή κύκλος που περνάει από το σημείο $(0,0,1)$

Χορδική Μετρική

Έστω $P_1(x', y', z')$ και $P_2(x'', y'', z'')$ οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ πάνω στη σφαίρα του Riemann. Έστω $d(z_1, z_2)$ η απόσταση του P_1 από το P_2. Τότε:

$$d^2(z_1, z_2) = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 =$$

$$= (x'^2 + y'^2 + z'^2) + (x''^2 + y''^2 + z''^2) - 2(x'x'' + y'y'' + z'z'') =$$

$$= 2 - 2(x'x'' + y'y'' + z'z'') \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}, \quad z_2 \neq \infty} \quad (4)$$

Σε περίπτωση όπου το $z_2 = \infty \Rightarrow \boxed{d(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}}$ (5)

Η συνάρτηση d καλείται <u>χορδική μετρική</u> για τη σφαίρα του Riemann.

Παρατηρούμε τέλος ότι $d(z_1, z_2) \leq 2$ που αυτό έπεται ότι το $\overline{\mathbb{C}}$ είναι φραγμένο ως προς τη χορδική μετρική d.

Τις σχέσεις (4) και (5) μπορούμε να τις αποδείξουμε και με β' τρόπο λύσης:

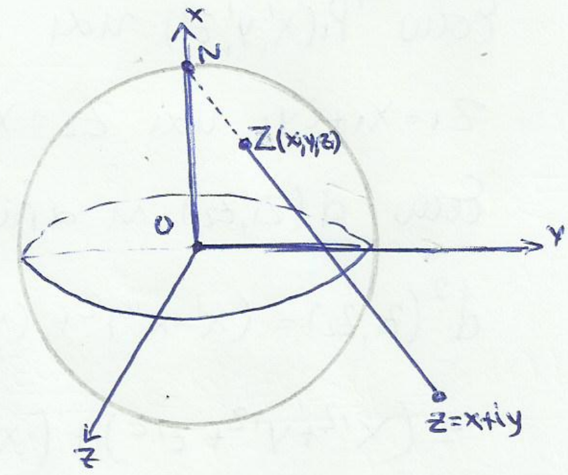
Στο 1º σχήμα είχαμε δει ότι ορίζοντας την απεικόνιση φ ουσιαστικά αντιστοιχούμε με έναν τρόπο το $\mathbb{C}$ στην επιφάνεια (S) του Riemann. Εκεί, φαίνεται ότι ότι όσο το z απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων τόσο η εικόνα μέσω της φ απεικόνισης είναι στο σημείο N.

(Σελ. 5)

Για αυτο θεωραμε τυχόν $z_1 \in \mathbb{C}$ ώστε $\varphi(z_1)=Z_1(x',y',z')$
και προφανως απο το προηγούμενο σχόλιο $\varphi(\infty)=(0,0,1)$

Θδο

$$\|\varphi(z_1)-\varphi(\infty)\|_2=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$



Παίρναμε:

$$\|\varphi(z_1)-\varphi(\infty)\|_2=\sqrt{x'^2+y'^2+(1-z')^2}=$$

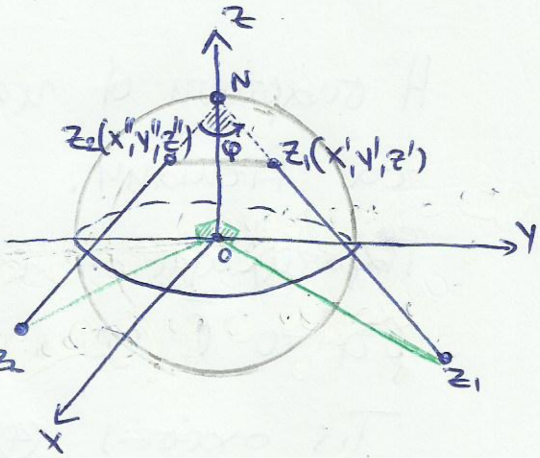
⊛⊛ $$=\sqrt{\frac{4x^2}{(1+|z|^2)^2}+\frac{4y^2}{(1+|z|^2)^2}+\left(1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{4|z|^2+4}}{(1+|z|^2)}=\frac{2}{(1+|z|)^2} \Rightarrow \boxed{\|\varphi(z_1)-\varphi(\infty)\|_2=\frac{2}{(1+|z|)^2}}$$

Για την άλλη περίπτωση θεωραμε τυχόν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ώστε
$\varphi(z_1)=Z_1(x',y',z')$ και $\varphi(z_2)=Z_2(x'',y'',z'')$

Θδο

$$\|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)\|_2=\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$$



Παίρναμε:

$$\|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)\|_2^2=|Z_1Z_2|^2$$

- Για το $\overset{\triangle}{NZ_1Z_2}$ από Νόμο συνημιτόνων:
  $|Z_1Z_2|^2=|NZ_1|^2+|NZ_2|^2-2|NZ_1|\cdot|NZ_2|\cos\varphi$ (1)
- Για το $\overset{\triangle}{Nz_1z_2}$ απο Νομο συνημιτονων:
  $|z_1-z_2|^2=|Nz_1|^2+|Nz_2|^2-2|Nz_1||Nz_2|\cos\varphi$ (2)

Επίσης στα τρίγωνα NOz_1 και NOz_2 απο Π.Θ:
$|Nz_1|^2=1+|z_1|^2$ και $|Nz_2|^2=1+|z_2|^2$

(Σελ. 6)

Άρα, στη (2) έχουμε:

$$|z_1-z_2|^2 = 1+|z_1|^2 + 1+|z_2|^2 - 2\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}\cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1+|z_1|^2 + 1+|z_2|^2 - |z_1-z_2|^2}{2\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} \quad (a)$$

Όμως, $|Nz_1|^2 = \|\varphi(z_1)-\varphi(\infty)\|_2^2 = \dfrac{4}{1+|z_1|^2}$ (b)

και

$$|Nz_2|^2 = \|\varphi(z_2)-\varphi(\infty)\|_2^2 = \frac{4}{1+|z_2|^2} \quad (\gamma)$$

Από (a), (b), (γ) στη σχέση (1) προκύπτει:

$$\|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)\|_2^2 = |z_1z_2|^2 =$$

$$= \frac{4}{1+|z_1|^2} + \frac{4}{1+|z_2|^2} - 2\,\frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+|z_2|^2}}\cdot\frac{1+|z_1|^2+1+|z_2|^2-|z_1-z_2|^2}{2\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} =$$

$$= \frac{4|z_1-z_2|^2}{2(1+|z_1|^2)\cdot(1+|z_2|^2)} \Rightarrow \boxed{\|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)\|_2 = \frac{2|z_1-z_2|}{2\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}}$$

(Σελ. 7)

Κάτι τελευταίο που θα αποδείξαμε είναι ότι: για τυχαία μιγαδική ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εαν:

$$z_n \to z_0 \Leftrightarrow \varphi(z_n) \to \varphi(z_0) \quad , z_0 \in \overline{\mathbb{C}}.$$

<u>Αποδ.</u>

Εστω $z_n \to z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$

- για $z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow \|\varphi(z_n)-\varphi(z_0)\|_2 = \dfrac{2|z_n-z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2}\sqrt{1+|z_0|^2}} \leq 2\cdot|z_n-z_0| \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(z_n) \to \varphi(z_0)$ (απλή εφαρμογή του ε-δ ορισμού)

- για $z_0 \in \{\infty\}$ (δηλ. $z_0=\infty$) $\Rightarrow \|\varphi(z_n)-\varphi(\infty)\|_2 = \dfrac{2}{\sqrt{1+|z_n|^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(z_n) \to \varphi(z_0)$.

Δηλαδή, έχουμε ότι το $\overline{\mathbb{C}}$ είναι φραγμένο

(Μια πιο αναλυτική απόδειξη της σελ. 5)

Σχόλιο: Το $\overline{\mathbb{C}}$ εφοδιασμένο με τη χορδική μετρική καθιστά έναν συμπαγής μετρικό χώρο ο οποίος έχει τοπολογικό υπόχωρο το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ (σελ. 8)